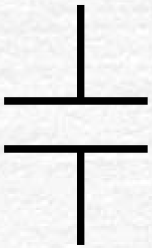
Teoría de Circuitos

Análisis de circuitos con transformada de Laplace

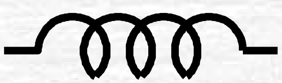
Prof. M. C. Miguelangel Fraga Aguilar

Capacitancia e inductancia



$$q = C v_c$$

$$i_c(t) = C\,\frac{dv_c(t)}{dt} \quad , \quad v_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + v_c(0)$$



$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \quad , \quad i(t) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau + i(0)$$

Transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} F(s)\, e^{st}\, ds$$

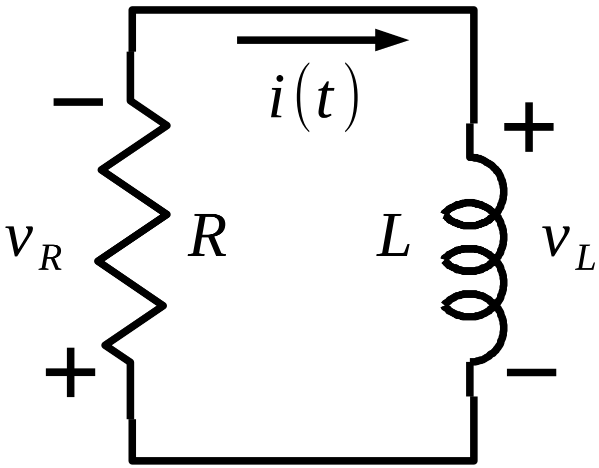
Parejas de transformadas

f(t)	F(S)	f(t)	F(S)
$\delta(t)$	1	$t^n e^{-at}/n!\ u(t)$	$1/(s+a)^{n+1}$
$u(t)$	$1/s$	Sen bt u(t)	$b/(s^2+b^2)$
$e^{-at}u(t)$	$1/(s+a)$	Cos bt u(t)	$s/(s^2+b^2)$
$t\ u(t)$	$1/s^2$	e^{-at} Sen bt u(t)	$b/((s+a)^2+b^2)$
$t^n/n!\ u(t)$	$1/s^{n+1}$	e^{-at} Cos bt u(t)	$s/((s+a)^2+b^2)$
$te^{-at}\ u(t)$	$1/(s+a)^2$		

Propiedades de la Transformada de Laplace

f(t)	F(s)	f(t)	F(s)
af(t)	aF(s)	tf(t)	-dF(s)/ds
$f_1(t)+f_2(t)$	$F_1(s)+F_2(s)$	$\boxed{\int_0^t f(\tau)\,d\tau}$	$\boxed{\frac{1}{s}F(s)}$
f(at)	(1/a)F(s)		
$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}\mathscr{L}\{f(t)\}$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$
$e^{-at}f(t)$	F(s+a)		
$\boxed{\frac{d\ f(t)}{dt}}$	$\boxed{sF(s)-f(0)}$		

Circuito RL primer orden



Aplicando la ley de voltajes de Kirchoff

$$v_R + v_L = 0$$

$$Ri(t) + L\frac{di}{dt} = 0$$

Dividiendo entre L

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0$$

Aplicando Transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\left\{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0\right\}$$

$$sI(s) - i(0) + \frac{R}{L}I(s) = 0$$

$$\left(s + \frac{R}{L}\right)I(s) = i(0)$$

$$I(s) = \frac{i(0)}{\left(s + \frac{R}{L}\right)}$$

Circuito RL primer orden (2)

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{ I(s) = \frac{i(0)}{\left(s + \frac{R}{L}\right)} \right\}$$

$$\boxed{i(t) = i(0)\, e^{\frac{-R}{L}t}}$$

Relaciones I-V en Laplace

Resistor: **V(s)=RI(s) ; I(s)=V(s)/R**

Capacitor:

$$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau+v(0)$$

$$I(s)=sCV(s)-Cv(0)$$

$$V(t)=\frac{1}{sC}I(s)+\frac{v(0)}{s}$$

Inductor:

$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau+i(0)$$

$$V(s)=sLI(s)-Li(0)$$

$$I(t)=\frac{1}{sL}V(s)+\frac{i(0)}{s}$$

Solución de circuitos por Transformada de Laplace

- Las fuentes independientes variables en el tiempo con su transformada de Laplace
- Se emplean LCK,LVK, analisis de mallas y nodos, teoremas de Thevenin, Norton y superposición, con las relaciones voltaje corriente transformadas, para encontrar la transformada de Laplace de la variable deseada.

Transformada Inversa de Laplace

- Se obtiene la variable deseada como una función del tiempo calculando la transformada inversa de Laplace del resultado anterior
- Se aplica fracciones parciales a la expresión de la variable deseada y se busca en las parejas de transformadas la función del tiempo equivalente

Expansión en fracciones parciales

- El grado del denominador debe ser mayor que el del numerador, si no, hacer división de polinomios

$$\frac{N(s)}{D(s)} = P(s) + \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

- Factorizar el denominador en factores de primero y segundo grado

Fracciones parciales (2)

- Factorizar el denominador en factores de las siguientes formas
- $$(ps+q)^n \quad (as^2+bs+c)^m$$
- Por cada factor de la forma (ps+q)^n se debe incluir la siguiente suma de n fracciones

$$\frac{A_1}{(ps+q)}+\frac{A_2}{(ps+q)^2}+\ldots+\frac{A_n}{(ps+q)^n}$$

Fracciones parciales (3)

- Por cada factor de la forma (as²+bs+c)^m se debe incluir la siguiente suma de m fracciones

$$\frac{B_1 s + C_1}{\left(as^2+bs+c\right)} + \frac{B_2 s + C_2}{\left(as^2+bs+c\right)^2} + \ldots + \frac{B_n s + C_n}{\left(as^2+bs+c\right)^n}$$

- Se hace la suma de fracciones y se igualan los coeficientes de igual grado del numerador para obtener ecuaciones que permitan encontrar las constantes A, B y C

Fracciones parciales (4)

- Para determinar el coeficiente de un factor del denominador con raíz real y que no se repita, se puede usar

$$A_i = \lim_{s \to q_i} \frac{N(s)(s - q_i)}{D(s)}$$

Ejemplo de transformada de Laplace inversa

- Encuentre la transformada de Laplace inversa de: $V(s)=\dfrac{5}{s^2+2s-3}$

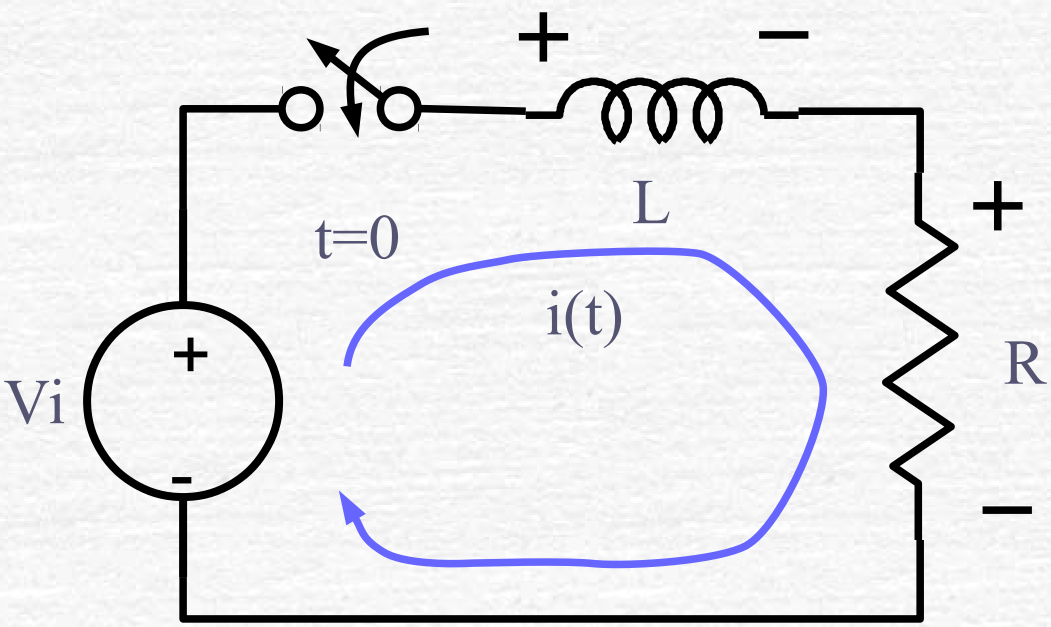
$$V(s)=\frac{5}{s^2+2s-3}=\frac{5}{(s+3)(s-1)}=\frac{A_1}{s+3}+\frac{A_2}{s-1}$$

$$A_1=\lim_{s\to -3}\frac{5}{s-1}=\frac{-5}{4}\qquad A_2=\lim_{s\to 1}\frac{5}{s+3}=\frac{5}{4}$$

$$V(s)=\frac{-5/4}{s+3}+\frac{5/4}{s-1}$$

$$v(t)=\frac{-5}{4}e^{-3t}u(t)+\frac{5}{4}e^{t}u(t)$$

Ejemplo



$$v_i(t)=V_i u(t)$$

$$V_i(s)=V_i\frac{1}{s}$$

$$LVK$$

$$-V_i(s)+V_L(s)+V_R(s)=0$$

$$V_L(s)=sLI(s)-Li(0)$$

$$V_R(s)=RI(s)$$

$$\frac{-V_i}{s}+sLI(s)-Li(0)+RI(s)=0$$

$$sLI(s)+RI(s)=\frac{V_i}{s}+Li(0)$$

$$(sL+R)I(s)=\frac{V_i}{s}+Li(0)$$

$$I(s)=\frac{V_i}{s(sL+R)}+\frac{Li(0)}{(sL+R)}$$

Ejemplo (2)

$$I(s)=\frac{V_i}{Ls(sL+R)/L}+\frac{(L/L)i(0)}{(sL+R)/L}=\frac{V_i}{Ls(s+R/L)}+\frac{i(0)}{(s+R/L)}$$

Aplicando fracciones parciales

$$I(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{(s+R/L)}+\frac{i(0)}{(s+R/L)}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0}\frac{V_i}{L(s+R/L)}=\frac{v_i}{R}$$

$$A_2=\lim_{s\to -R/L}\frac{V_i}{L(s)}=\frac{-v_i}{R}$$

$$I(s)=\frac{V_i}{Rs}-\frac{V_i}{R(s+R/L)}+\frac{i(0)}{(s+R/L)}$$

$$i(t)=\frac{V_i}{R}u(t)-\frac{V_i}{R}e^{(-R/Lt)}+i(0)e^{(-R/Lt)}$$